ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1981

Option P' — MATHEMATIQUES I — (4 h)

(Deux pages dactylographiées)

N.B.1. Dans tout le problème, on représente par le même symbole un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme associée.

N.B.2. On admet que si $\sum a_n x^n$ et $\sum \beta_n x^n$ sont des séries entières réelles qui convergent pour $|x| < R$, alors la série entière $\sum \gamma_n x^n$, où $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}$, converge pour $|x| < R$; de plus, pour $|x| < R$, on a alors : $\left(\sum_0^\infty a_n x^n\right)\left(\sum_0^\infty \beta_n x^n\right) = \sum_0^\infty \gamma_n x^n$.

PARTIE I

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - x^2$.

I.1-a) Déterminer le plus grand intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que :

$\begin{cases} 0 \in I \\ \text{La restriction } g|I \text{ de g à I établit une bijection de I sur } J = g(I). \end{cases}$

Dans toute la suite, on note f la fonction réciproque de g|I (f est une bijection de J sur I). Expliciter f(x).

b) Montrer que f est continue sur J. Déterminer le plus grand sous-intervalle J' de J sur lequel f est indéfiniment dérivable.

c) Montrer que, sur J', la fonction dérivée f' de f vérifie :

$$f' = 1 + 2ff'.$$

Résoudre sur J' l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = 1 + 2yy' \text{ , avec } y(0) = 0.$$

I.2-a) Montrer que la fonction f admet un développement en série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, et le déterminer. On donnera de a_n une expression faisant intervenir des factorielles ou des coefficients binômiaux.
Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ?

b) Vérifier que pour tout réel x tel que $|x| < R$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k |x|^k < \frac{1}{2}.$$

En déduire que les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n R^n$ et $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n R^n$ convergent.

c) Vérifier que pour tout $n \geq 2$ on a : $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

Vérifier que pour tout $n \geq 1$ on a : $a_n \in \mathbb{N}$.

PARTIE II

On désigne par $n \mapsto P_n$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$\begin{cases} P_0 \text{ est le polynôme nul} \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{n+1} = X + P_n^2. \end{cases}$

II.1-a) Calculer P_i pour $i \in \{1,2,3\}$.

b) On note $\mathcal{P}_n$ la restriction à $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ de la fonction polynôme associée à P_n. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une fonction croissante ; déterminer l'image de $\mathbb{R}_+$ par $\mathcal{P}_n$.

II.2-a) Calculer le degré de P_n, la valuation de P_n et celle de $(P_{n+1} - P_n)$.

.../...

II.3- a) Vérifier que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite $n \longmapsto P_n(x)$ est croissante.

b) Vérifier que pour x fixé, tel que $x > \frac{1}{4}$, on a : $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = +\infty$.

c) Vérifier que pour x fixé, tel que $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(x) \leqslant f(x)$.

En déduire que, dans ce cas, la suite $n \longmapsto P_n(x)$ converge et admet f(x) pour limite (f est la fonction définie en I.1-a).

II.4- Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note T_q l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même qui au polynôme P associe le polynôme $T_q(P)$ défini par :

$$\begin{cases} \text{Si } d^\circ P \leqslant q \text{ , alors } T_q(P) = P \\ \text{Si } P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, \text{ avec } p > q \text{ et } a_p \neq 0, \text{ alors } T_q(P) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k. \end{cases}$$

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$[T_n(P_n)](x) \leqslant P_n(x).$$

b) Montrer qu'il existe une unique série entière $\sum a_n x^n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = [T_n(P_n)](x)$.

On désigne par ρ le rayon de convergence de cette série entière et par s sa somme.

c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{1}{4}]$, on a $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant f(x)$.

En déduire : $\rho \geqslant \frac{1}{4}$.

d) Vérifier que, pour tout $x \in [0, \frac{1}{4}[$, on a : $s(x) - s(x)^2 = x$.

En déduire que les fonctions s et f coïncident sur $[0, \frac{1}{4}]$. Les comparer sur $[-\frac{1}{4}, 0]$.

e) On pose : $u_n = \sup_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |f(x) - P_n(x)|$. Montrer : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

PARTIE III

Dans cette troisième partie, x désigne un réel fixé tel que $-1 < x < 0$, et on se propose d'étudier la suite $n \longmapsto P_n(x)$.

III.1-a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad -\sqrt{-x} < P_n(x) < 0$.

b) Montrer que si la suite $n \longmapsto P_n(x)$ admet une limite l(x), alors on a :

$l^2(x) = l(x) - x \quad ; \quad l(x) \leqslant 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(x) \neq l(x) \quad ; \quad 2|l(x)| \leqslant 1$

(On pourra faire intervenir $l^2(x) - P_n^2(x)$).

c) Montrer que si $-1 \leqslant x < -\frac{3}{4}$, alors la suite $n \longmapsto P_n(x)$ diverge.

III.2- On suppose désormais que le réel fixé x vérifie : $-\frac{3}{4} \leqslant x < 0$.

a) On note θ la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $x + y^2$, et ϕ la fonction $\theta \circ \theta$.

Montrer qu'il existe une fonction polynôme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\phi(y) - y = h(y) \cdot [\theta(y) - y]$$

Résoudre l'équation $\phi(y) = y$, à l'inconnue $y \in \mathbb{R}$.

b) Etudier la fonction ϕ et la représenter graphiquement.

Trouver des inégalités entre les zéros de ϕ' et les solutions de $\phi(y) = y$.

En remarquant que $P_{n+2}(x)$ est égal à $\phi(P_n(x))$, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités :

$f(x) \leqslant P_{2n+2}(x) \leqslant P_{2n}(x) \leqslant 0$ et $\quad x \leqslant P_{2n+1}(x) < P_{2n+3}(x) \leqslant f(x)$.

Conclure quant à la convergence de la suite $n \longmapsto P_n(x)$ et éventuellement quant à sa limite.

******

***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail